Soluție

1.a) $x_{n+1} = a \cdot x_n - b \cdot y_n$, $y_{n+1} = b \cdot x_n + a \cdot y_n$. Deci $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = \left(a^2 + b^2\right) \cdot \left(x_n^2 + y_n^2\right)$

b) Șirurile $\left(x_n\right)_n$, $\left(y_n\right)_n$ sunt mărginite $\Leftrightarrow$ $\left(d_n\right)_n$, $d_n = x_n^2 + y_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ este mărginit.

$d_{n+1} = \left(a^2 + b^2\right) \cdot d_n$ deci $d_n = \left(a^2 + b^2\right)^n \cdot \left(x_0^2 + y_0^2\right)$. Dacă $a^2 + b^2 \le 1 \Rightarrow d_n \le x_0^2 + y_0^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dacă $a^2 + b^2 > 1$ șirul (d_n) este nemărginit.

c) $A = 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_n = 2^n \cdot \left(x_0 \cdot \cos\frac{n\pi}{3} - y_0 \cdot \sin\frac{n\pi}{3}\right)$

De aici rezultă relația cerută.

2.a) $\hat{1}^2 = \widehat{10}^2 = \hat{1}^2$, $\hat{2}^2 = \hat{9}^2 = \hat{4}$, $\hat{3}^2 = \hat{8}^2 = \hat{9}$, $\hat{4}^2 = \hat{7} = \hat{5}$, $\hat{5}^2 = \hat{6}^2 = \hat{3} \Rightarrow$ ecuația nu are soluții în $\mathbb{Z}_{11}$.

b) Numărul este $10 \cdot 11^2 = 1210$.

c) Dacă polinomul are o soluție $a \in \mathbb{Z}_{11}$, atunci $a^2 + a + \hat{1} = \hat{0}$, deci $\left(\hat{2}a + \hat{1}\right)^2 = \hat{8}$, fals. Cum polinomul dat are gradul doi și nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_{11}$, rezultă concluzia.